ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986
УДК 514.75

ОБ ОТОБРАЖЕНИИ $f:(V_p\subset E_n)\to(\overline{V}_p\subset E_{p+\tau})$ В ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ФУБИНИ-ЧЕХА

О.В.Казнина

В работе исследован случай, когда отображение является изометрией. Рассмотрены свойства отображения геодезических линий, частично чебышевских и чебышевских сетей.

1. Обобщенная задача Фубини-Чеха состоит в следующем: дана гладкая p-поверхность V_p в евклидовом пространстве E_n, ($\operatorname{codim}V_p=n-p$), зафиксирована плоскость $E_{p+\tau}$ и рассматривается параллельное проектирование поверхности V_p в $E_{p+\tau}$ вдоль ее ортогонального дополнения $E_{n-(p+\tau)}$ в пространстве E_n. Образ V_p в этом проектировании есть поверхность $\overline{V}_p\subset E_{p+\tau}$. Возникает отображение $f:(V_p\subset E_n)\to(\overline{V}_p\subset E_{p+\tau})$. Можно считать, что V_p и $\overline{V}_p$ – такие куски поверхностей, что отображение f является биективным. К поверхности V_p присоединим подвижной репер $R^x=\{x,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha\}$, где $\{\vec{e}_i\}$-базис касательной плоскости $T_p(x)$ к поверхности V_p, $|\vec{e}_i|=1$, а $\{\vec{e}_\alpha\}$-ортонормированный базис нормальной плоскости $N_{n-p}(x)$ к поверхности V_p ($i,j=1,\dots,p$; $\alpha,\beta=p+1,\dots,n$). К поверхности $\overline{V}_p$ присоединим подвижной репер $R^{x_1}=\{x_1,\vec{a}_i,\vec{e}_\tau\}$, где $x_1=f(x)$, $\vec{a}_i=f_{*x}(\vec{e}_i)$ –базис касательной плоскости $T_p(x_1)$ к поверхности $\overline{V}_p$ (заметим, что в дальнейшем будем рассматривать лишь те точки поверхности V_p, для которых система векторов $\{\vec{a}_i\}$ линейно независима), $\{\vec{e}_\tau\}$-ортонормированный базис общего τ-мерного направляющего векторного подпространства плоскостей $E_{p+\tau}$ и $N_{n-p}(x)$ ($\tau,\sigma=p+1,\dots,p+\tau$).

Если на поверхности V_p задана сеть Σ_p и векторы $\vec{e}_i$ репера R^x направлены по касательным к линиям этой сети, то на поверхности $\overline{V}_p$ определится сеть $\overline{\Sigma}_p$ –образ сети Σ_p в отображении f и векторы $\vec{a}_i=f_{*x}(\vec{e}_i)$ будут направлены по касательным к линиям сети $\overline{\Sigma}_p$. Известна

связь γ_{ij} и $\overline{\gamma}_{ij}$ –метрических тензоров поверхностей V_p и $\overline{V}_p$:

$$\overline{\gamma}_{ij}=\gamma_{ij}-\sum_{\hat\alpha} h^{\hat\alpha}_i h^{\hat\alpha}_j. \qquad (1)$$

Пусть отображение $f:(V_p\subset E_n)\to(\overline{V}_p\subset E_{p+\tau})$ переводит ортогональную сеть Σ_p в ортогональную сеть $\overline{\Sigma}_p$ и обратно. Это возможно тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\hat\alpha} h^{\hat\alpha}_i h^{\hat\alpha}_j=0 \qquad (i\neq j). \qquad (*)$$

Геометрический смысл равенств (*) заключается в том, что векторные проекции векторов $\vec{e}_i$ и $\vec{e}_j$ на плоскость $E_{n-(p+\tau)}$ вдоль $E_{p+\tau}$ ортогональны. Итак, ортогональная сеть Σ_p является основанием отображения f тогда и только тогда, когда ортогональны проекции касательных к линиям этой сети векторов на $E_{n-(p+\tau)}$.

2. Пусть отображение f есть изометрия, тогда из соотношений (1) для $i=j$ имеем $\sum_{\hat\alpha}(h^{\hat\alpha}_i)^2=0$, откуда получаем, что в каждой точке $x\in V_p$ имеем неподвижную плоскость $E_{n-(p+\tau)}$, ортогональную к $T_p(x)$. Присоединим к такой поверхности подвижной репер $R^x=\{x,\vec{e}_i,\vec{e}_\tau,\vec{e}_{\hat\alpha}\}$, где $\{\vec{e}_i\}$ –базис касательной плоскости $T_p(x)$ поверхности V_p, $\{\vec{e}_{\hat\alpha}\}$ –базис плоскости $E_{n-(p+\tau)}$, $\vec{e}_\tau\perp\vec{e}_{\hat\alpha}$, $\vec{e}_\tau\perp\vec{e}_i$, $\vec{e}_\tau\cdot\vec{e}_\sigma=\delta_{\tau\sigma}$ ($\hat\alpha,\hat\beta=p+\tau+1,\dots,n$). Имеем $d\vec{e}_{\hat\alpha}=\omega^{\hat\beta}_{\hat\alpha}\vec{e}_{\hat\beta}$. Так как $d\vec{x}\in T_p(x)$, то имеем тождество $d\vec{x}\cdot\vec{e}_{\hat\alpha}=0$. Дифференцируя его, получим $d^2\vec{x}\cdot\vec{e}_{\hat\alpha}=0$. Дифференцируя еще раз, получаем $d^3\vec{x}\cdot\vec{e}_{\hat\alpha}=0$ и т.д. Следовательно имеем $d\vec{x}\perp\vec{e}_{\hat\alpha}$, $d^2\vec{x}\perp\vec{e}_{\hat\alpha}$, $d^3\vec{x}\perp\vec{e}_{\hat\alpha},\dots,d^k\vec{x}\perp\vec{e}_{\hat\alpha}$. Итак, поверхность V_p локально принадлежит плоскости $E'_{p+\tau}$, ортогонально дополнительной к $E_{n-(p+\tau)}$ в пространстве E_n. Имеем $V_p\subset E'_{p+\tau}$, $\overline{V}_p\subset E_{p+\tau}$. Плоскости $E'_{p+\tau}$ и $E_{p+\tau}$ параллельны в пространстве E_n, и т.к. $\vec{x}=\vec{x}_1+\vec{c}$, то поверхность $\overline{V}_p$ получена из поверхности V_p с помощью параллельного переноса.

Вывод: Если отображение f –изометрия, то коразмерность поверхности V понижается с $(n-p)$ до τ, и отображение f становится параллельным переносом, переводящим $V_p\subset E_{p+\tau}$ в $\overline{V}_p\subset V_{p+\tau}$.

3. Из соотношений, связывающих формы реперов R^x и R^{x_1}, имеем:

$$\overline{\omega}^j_i-\omega^j_i=h^j_{ik}\,\omega^k. \qquad (2)$$

Если на поверхности V_p зафиксирована сеть Σ_p и векторы $\vec{e}_i$ направлены по касательным к линиям этой сети, то формы ω_i^j и формы $\bar{\omega}_i^j$ $(i \neq j)$ становятся главными [1] $\omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k$, $\bar{\omega}_i^j = \bar{a}_{ik}^j \omega^k$. Если линия ω^i сети Σ_p -асимптотическая относительно конусов $\Phi^\alpha = 0$ ($\Phi^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^i \omega^j$, где $\{b_{ij}^\alpha\}$ есть подтензор второго основного тензора $\{b_{ij}^\alpha\}$ поверхности V_p, то она в силу строения компонент тензора h_{ik}^j является f -главной [2]. Обратное в общем случае неверно.

Если линия ω^i сети $\Sigma_p \subset V_p$ является асимптотической относительно конусов $\Phi^\alpha = 0$, то линия $\bar{\omega}_1^i$ является геодезической тогда и только тогда, когда линия ω^i -геодезическая.

Рассмотрим линии ω^i и ω^j сети $\Sigma_p \subset V_p$. Из соотношений (2) можно записать

$$\bar{a}_{ij}^j = a_{ij}^j + h_{ij}^j, \quad \bar{a}_{ij}^k = a_{ij}^k + h_{ij}^k \quad (i \neq j, \ k \neq i, j). \qquad (3)$$

Справедливо утверждение:

Если сеть Σ_p частично чебышевская $(\vec{a}_{ij} = \vec{0}, i \neq j)$, то направления, касательные к линиям $\bar{\omega}^i$ и $\bar{\omega}^j$, f-сопряжены [2] тогда и только тогда, когда сеть $\bar{\Sigma}_p$ является частично чебышевской $(\vec{\bar{a}}_{ij} = \vec{0}, i \neq j)$. Если сеть Σ_p чебышевская, то из (2) получим $\vec{\bar{a}}_{ij}^i = h_{ij}^i$, $\vec{\bar{a}}_{ij}^j = h_{ij}^j$, $\vec{\bar{a}}_{ij}^k = h_{ij}^k$ $(i \neq j, k \neq i, j)$. Отсюда видно, что необходимым и достаточным условием сохранения сетью свойства быть чебышевской в отображении f является f -сопряженность этой сети.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве: Литовский матем.сб. | АН Лит.ССР.- Вильнюс, 1966. Т.6. № 4. С.475-490.

2. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии отображений гладких многообразий || Тез.докл. VI Прибалт.геометр.конф.- Таллин. Изд-во Тартуского ун-та, 1984. С.18.

3. Н и к о л а е в с к а я Т.Е. О задаче Фубини-Чеха в евклидовом пространстве E_4 || Тез.докл. VII Всесоюзн. конф. по современным проблемам геометрии.- Минск: Изд-во БГУ, 1979. С.138.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ КОНИК, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ОДНОМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ КВАДРИК

И.П.К о р н е в а

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассмотрены двупараметрические семейства (конгруэнции) $\mathcal{L}$ невырожденных коник C [1], принадлежащих одномерному многообразию квадрик Q. Доказано, что конгруэнции $\mathcal{L}$ существуют с произволом двух функций двух аргументов и исследованы подклассы со специальными свойствами ассоциированных геометрических образов.

Отнесем конгруэнцию к подвижному реперу $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, где A_3 является характеристической точкой плоскости коники $C \in \mathcal{L}$, A_1 и A_2 -точки пересечения поляры точки A_3 с коникой C, точка A_4 помещена в полюс плоскости коники C относительно квадрики Q.

Деривационные формулы подвижного репера имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \qquad (1)$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \qquad (2)$$

и условию эквипроективности: $\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0$.

В выбранном репере уравнения квадрики Q и коники C с учетом ее принадлежности квадрике Q соответственно примут вид:

$$F \equiv (x^3)^2 + (x^4)^2 - 2x^1x^2 = 0, \qquad (3)$$

$$f \equiv (x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0. \qquad (4)$$

Рассмотрим общий случай, когда плоскости коник обра-